Departamento de Física

Física I -2009/2010

3ª Série - Movimento unidimensional - Resolução

Questões:

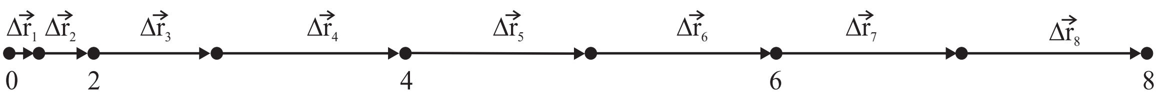
Q1 -Esboce um diagrama de pontos para cada um dos movimentos unidimensionais abaixo indicados, de acordo com as seguintes instruções:

- **Utilize o modelo de uma partícula (ou seja, represente o corpo cujo movimento está a estudar por uma única partícula)**
- **Bastam seis a oito marcas pontuais para cada um dos diagramas.**
- **Numere as posições de acordo com a sua ordem pontual.**
- **Apresente os diagramas de forma clara e precisa.**

a) Um automóvel arranca ao longo de uma estrada rectilínea, após o semáforo ter passado a verde e algum tempo depois desloca-se com velocidade constante.

Justificação:

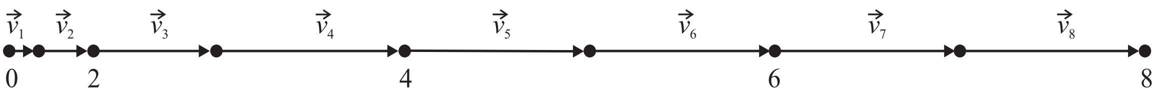
O diagrama apresenta umavisão estroboscópia do movimento. São apresentadas as posições dos ponto, durante o movimento, para instantes separados por intervalos de tempo iguais. Os vectores deslocamento entre as posições apresentadas são os indicados na figura seguinte:



A velocidade média entre cada par de pontos consecutivos é dada por

$$\vec{v}_{i_{\text{med}}} = \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t}.$$

Como os intervalos de tempo, Δt, são iguais, podemos representar de forma análoga os vectores velocidade média para cada intervalo de tempo, numa escala apropriada. Se os intervalos de tempo forem infinitesimais ($\Delta t \to 0$), esses vectores representam a velocidade instantânea no instante considerado:

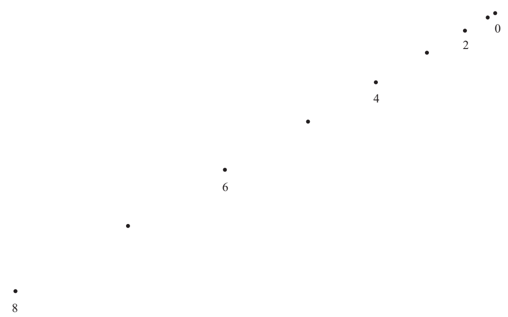


No início do movimento, este é acelerado com aceleração de módulo positivo, isto é, $0 < |\Delta\vec{v}/\Delta t|$. Por exemplo, $|\vec{v}_1| < |\vec{v}_2|$. A partir de determinado instante (na figura, o instante t_4), o movimento possui velocidade constante

b) Um elevador parte do repouso do topo da Torre Vasco da Gama até parar no nível térreo.

O movimento é acelerado no início (com aceleração e velocidade com o mesmo sentido) e no final (com aceleração e velocidade com sentidos opostos). Na região intermédia, o movimento possui velocidade constante.

c) Um esquiador parte do repouso no cimo de uma encosta de neve (que faz um ângulo de 30^o com a horizontal) e desliza atá à base da encosta.

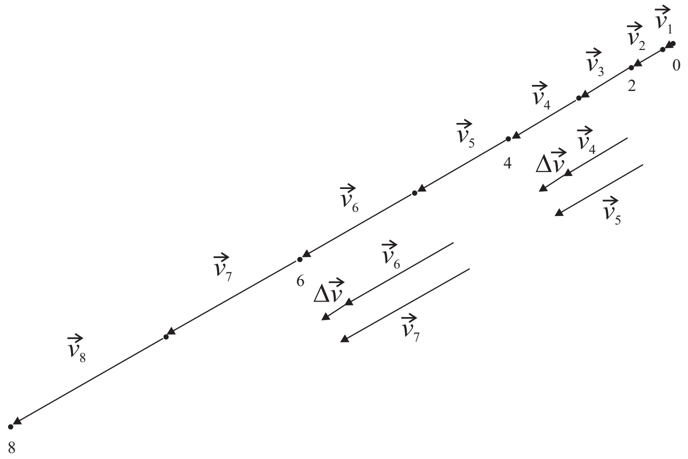


Justificação:

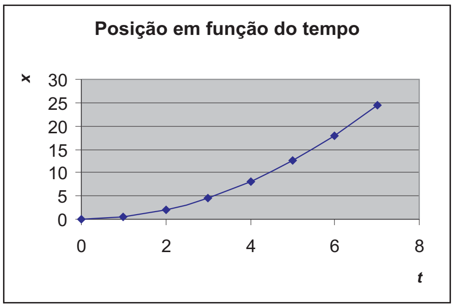
O movimento é uniformemente acelerado. Repare-se que, para intervalos de tempo consecutivos,

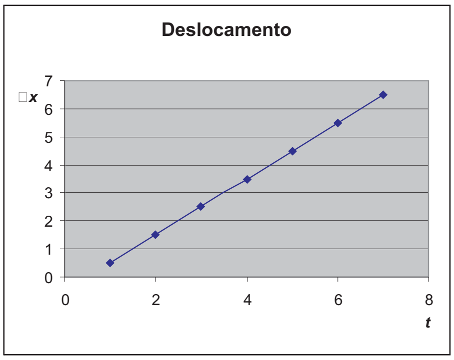
$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \Delta\vec{v},$$

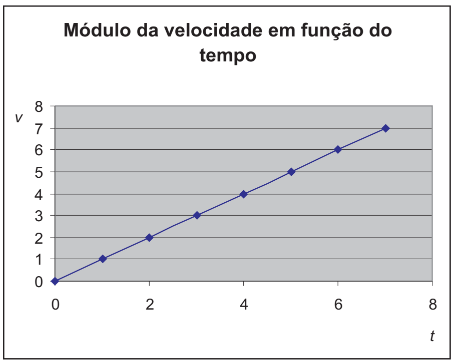
com $\Delta\vec{v} =$ constante.



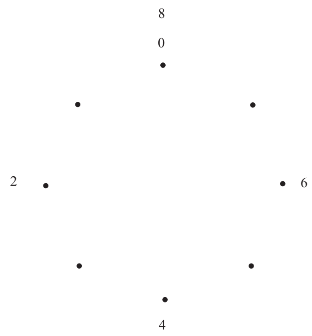
Isto implica $\Delta\vec{v}/\Delta t =$ constante, ou seja, a aceleração média, $\vec{a}_{\text{med}}$, é constante no tempo. Como isto é verdade para qualquer intervalo de tempo Δt, a aceleração instantânea, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, também é constante no tempo.





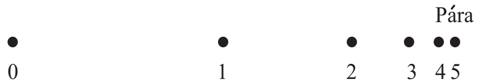


d) O vai-vem espacial desloca-se numa órbita circular em torno da Terra, completando uma revolução em 90 minutos.



Q2 Para cada um dos diagramas seguintes, escreva uma breve descrição do movimento de um objecto que corresponda ao diagrama apresentado. A sua descrição, que deve mencionar um objecto específico, deve ser similar às que são apresentadas em Q1.

a)

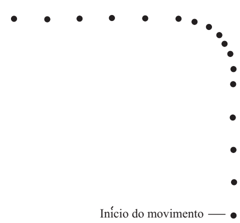


Um automóvel desacelera (isto é, deslocando-se em mivneto rectilínio, a sua aceleração tem sinal contrário ao da velocidade), porque o condutor avistou um sinal vermelho, o que o força a aparar-

b)

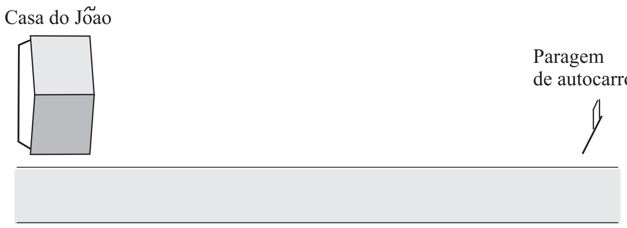
Um objecto, largado do repouso, cai com movimento unformemente acelerado.

c)



Um automóvel desloca-se com velocidade constante ao longo de uma trajectória rectilínea, até que atinge uma curva circular, que é descrita com velocidade de módulo inferior. Após a curva, o automóvel desloca-se de novo numa trajectória rectilínea, com avelocidade de módulo igual à da velocidade antes da curva.

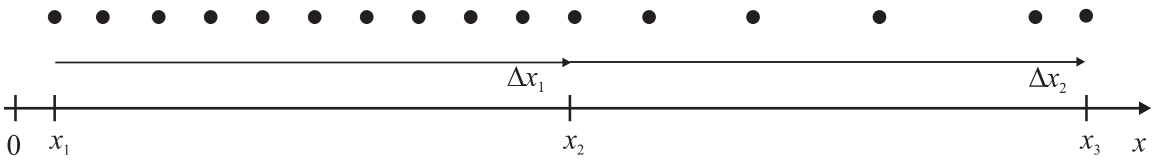
Q3 - Saindo de casa. o João anda com velocidade constante no sentido da paragem do autocarro, que dista da casa 200 m . A meio caminho entre a casa e a paragem, avista um autocarro e começa a correr com velocidade de módulo crescente até atingir a paragem.



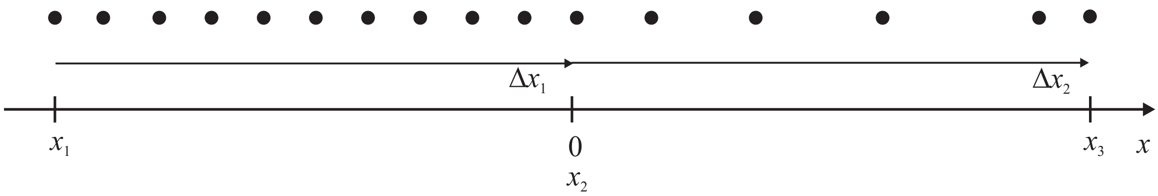
a) Desenhe um diagrama do movimento do João ao longo da rua.

Mudámos aqui, ligeiramente, o movimento: no último intervalo, o módulo da velocidade do João diminuiu (não queremos que ele bata na paragem de forma descontrolada)

b) Adicione um eixo de coordenadas, com origem na casa do João, debaixo do diagrama que desenhou. Chame x_1 à posição em que o João começa a andar, x_2 à posição em que se encontra quando avista o autocarro e x_3 à posição em que atinge a paragem de autocarro. Desenhe setas acima do eixo de coordenadas que representem o deslocamento do João, Δx_1, desde a posição inicial à posição em que avista o autocarro e o deslocamento, Δx_2, desde esta última posição até à posição final, junto à paragem.



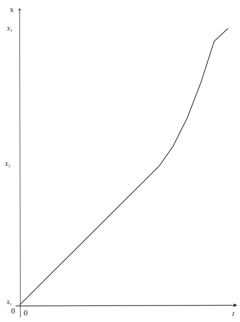
c) Repita a alínea b) num novo desenho, agora colocando a origem do eixo de referência na posição em que se encontrava o João quando avistou o autocarro.



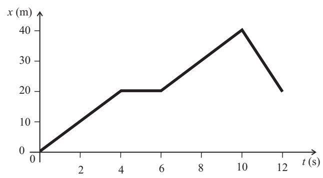
d) Como variam as setas que representam os deslocamentos quando muda a posição da origm do referencial?

Não variam

e) Utilizando dois eixos coordenados, esboce um gráfico da posição do João em função do tempo, correpondendo ao movimento do João.



Q4 - O gráfico abaixo mostra em posição, em função do tempo, de um objecto que se move numa trajectória rectilínea, durante 12 s.



a) Indique a posição do objecto nos seguintes instantes de tempo:

$t = 2\,\text{s}$;

$t = 4\,\text{s}$;

$t = 6\,\text{s}$;

$t = 10\,\text{s}$.

b) Qual é a velocidade do objecto durante os primeiros 4 s do movimento?

c) Qual é a velocidade do objecto no intervalo de tempo de $t = 4\,\text{s}$ a $t = 6\,\text{s}$?

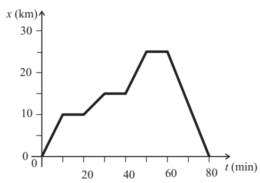
d) Qual é a velocidade do objecto no intervalo de tempo de $t = 6\,\text{s}$ a $t = 10\,\text{s}$?

e) Qual é a velocidade do objecto no intervalo de tempo de $t = 10\,\text{s}$ a $t = 12\,\text{s}$?

f) Esboce um diagrama do movimento (pontos) no intervalo de tempo de $t = 0\,\text{s}$ a $t = 12\,\text{s}$.

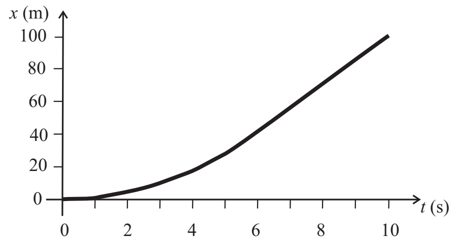
Q5 - Interprete os seguintes gráficos da posição em função do tempo, para movimento unidimensional escrevendo uma pequena descrição do que está a acontecer. Seja criativo.

a) Um automóvel em movimento

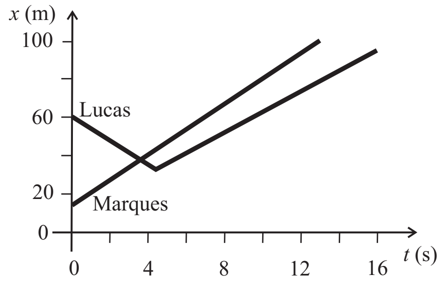


O automóvel desloca-se com velocidade constante de módulo $v_1 = 1\,\text{km/min}$ durante 10 minutos, após o que permanece parado durante 10 minutos. Em seguida desloca-se, durante 10 minutos com velocidade de módulo $v_2 = 0.5\,\text{km/min}$, estando depois imóvel durante 10 minutos, para se deslocar de novo, durante 10 minutos com velocidade de módulo v_1. Após estar parado dez minutos, regressa ao ponto de partida, deslocando-se durante 20 minutos com velocidade de módulo $v_3 = 1.25\,\text{km/min}$. Em resumo, o automóvel deslocou-se até 25 km do ponto de partida, tendo gasto 45 minutos para a viagem de ida (incluindo as paragens ao longo do percurso), esteve parado 10 minutos, após o que regressou ao ponto de partida, sem paragens, gastando 20 minutos na viagem de volta.

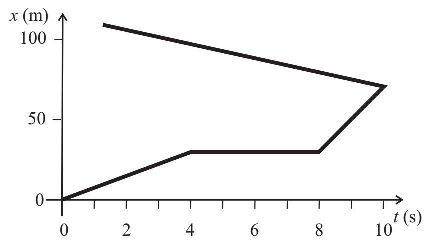
b) Corredor de 100 m



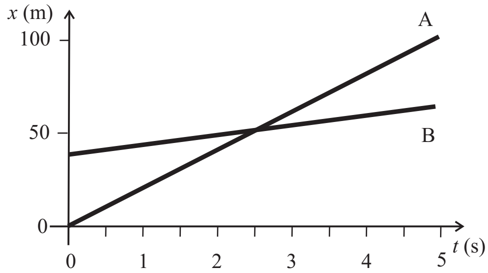
c) Dois jogadores de futebol



Q6 - Consegue dar uma interpretação do seguinte gráfico da posição em função da velocidade? Em caso afirmativo, apresente essa interpretação. No caso contrário, dê uma justificação para a sua resposta.



Q7 - A figura seguinte apresenta um gráfico da posição em função do tempo para dois corpos A e B que se movem ao longo do mesmo eixo.



a) No instante $t = 1\,\mathrm{s}$ a velocidade do corpo A é superior, inferior ou igual à do corpo B? Justifique.

No instante $t = 1\,\mathrm{s}$ a velocidade do corpo A é, em módulo, superior à do corpo B. Com efeito, a partir de um gráfico da posição em função do tempo para o movimento unidimensional, a velocidade de um corpo num determinado instante é dada pelo declive da curva nesse ponto. Para $t = 1\,\mathrm{s}$ o declive da curva que representa as posições do corpo A em função do tempo é superior ao da curpa correspondente para B.

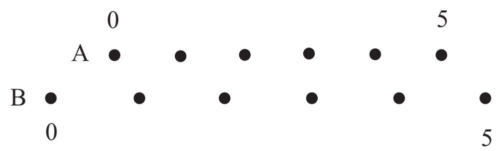
b) Os dois corpos A e B possuem a mesma velocidade em algum instante? Em caso afirmativo, indique o ou os instantes em que isso acontece. Em qualquer caso, justifique a sua resposta.

As curvas referidas na alínea anterior possuem declive constante. Consequentemente, o módulo da velocidade do corpo A é, em todos os instantes, superior ao módulo da velocidade do corpo B. A resposta portanto é negativa: os dois coppos nunca possuem a mesma velocidade.

Note-se que no intante $t = 2.5\,\mathrm{s}$ os dois corpos ocupam a mesma posição *mas possuem velocidades diferentes.*

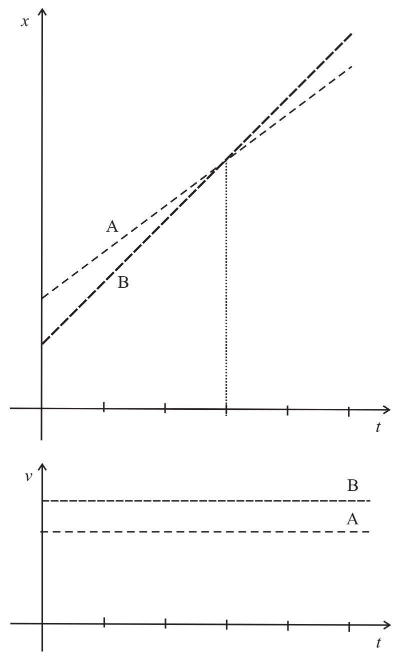
Q8 - Desenhe um gráfico da posição em função do tempo e um gráfico da velocidade em função do tempo para um corpo que está em repouso na posição $x = 1$ m.

Q9 - A figura mostra um diagrama de posição para os movimentos de dois automóveis, A e B. Para cada caso, o intervalo de tempo decorrido entre duas posições sucessivas é de 1 s.

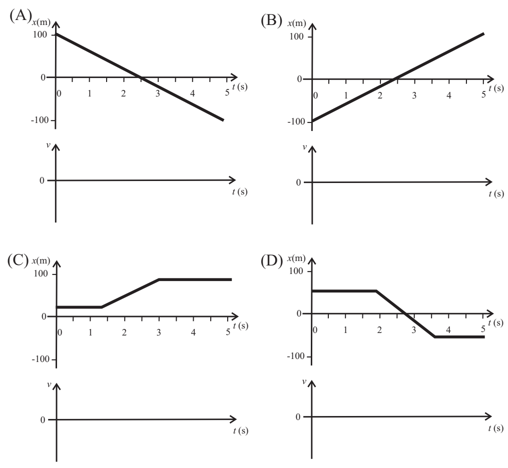


a) Desenhe o gráfico da posição em função do tempo e o gráfico da velocidade em função do tempo que correspondem a este diagrama. Para cada caso (posição e velocidade) represente o movimento de ambos os automóveis no mesmo gráfico.

b) Existe algum instante de tempo em que os dois automóveis ocupem a mesma posição? Se sim, marque esse ou esses instantes nos gráficos, utilizando linhas verticais.

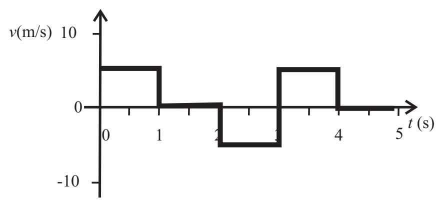


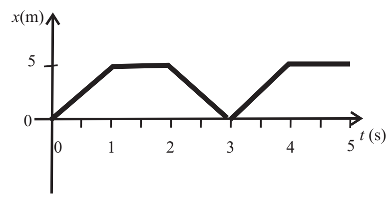
Q10 - Para cada um dos seguintes gráficos da posição em função do tempo, desenhe o correspondente gráfico da velocidade em função do tempo, imediatamente por baixo, como mostra a figura.



Q11 - Considere o seguinte gráfico da velocidade em função do tempo que descreve o movimento de um corpo. Imediatamente abaixo desenhe o gráfico da posição em função do tempo para o mesmo movimento. Escolha a escala apropriada para a velocidade e descreva o movimento.

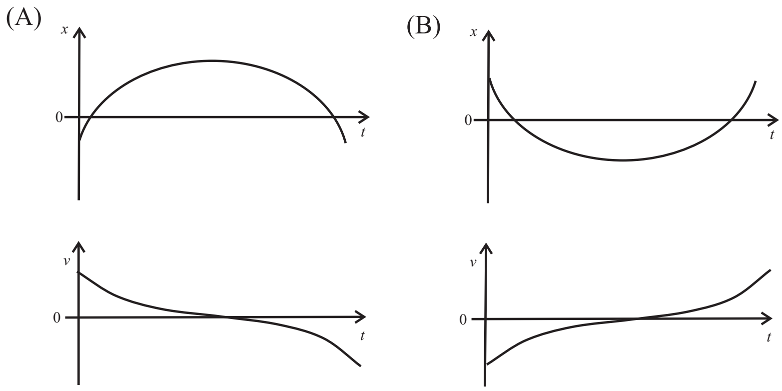
<u>Resolução</u>:



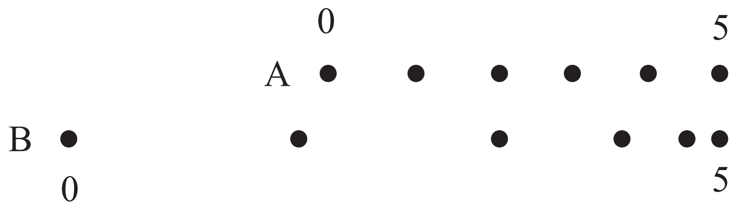


Q12 - Considere os dois gráficos seguintes de posição em função do tempo. Para cada gráfico, desenhe o correspondente gráfico da velocidade em função do tempo imediatamente abaixo. Não são apresentados valores, mas os gráficos que desenhar deverão indicar correctamente as velocidades relativas.

Resolução:



Q13 - A figura mostra o diagrama de movimento para dois automóveis, A e B.



a) Desenhe um único gráfico da posição em função do tempo.e, imediatamente por baixo, o correspondente gráfico da velocidade em função do tempo, para os movimentos de ambos os carros.

b) Existe algum instante de tempo em que automóveis ocupem a mesma posição? Em caso afirmativo indique-o(s) no diagrama do movimento e nos gráficos.

c) Existe algum instante de tempo em que os dois os automóveis tenham a mesma velocidade? Em caso afirmativo indique-o(s) no diagrama do movimento e nos gráficos.

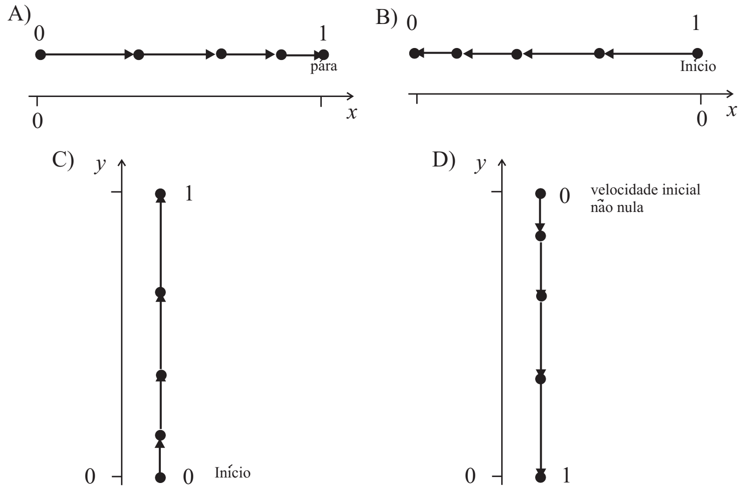
Q14 - Desenhe um gráfico da posição em função do tempo.e, imediatamente por baixo, o correspondente gráfico da velocidade em função do tempo, para os seguintes movimentos unidimensionais..

a) Um automóvel parte do repouso, acelera uniformemente até atingir a velocidade de 60 km/hora em 15 s, move-se com velocidade constante durante 30 s e volta a estar em repouso após 5 s.

b) Uma pedra cai de uma ponte e cai com movimento uniformemente acelerado. O módulo da sua velocidade é de 30 m/s quando atinge o solo, 3 s depois

Q15 - Os quatro diagramas de movimento unidimensional seguintes apresentam uma posição inicial 0 e uma posição final 1. Nos diagramas a) e b) (movimento horizontal) os símbolos x_0 e x_1 representam as posições inicial e final, os símbolos v_{x_0} e v_{x_1} as velocidades inicial e final e

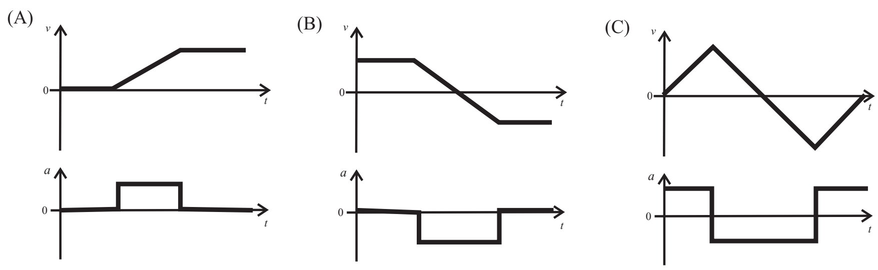
a_x a aceleração (constante). Nos diagramas c) e d) (movimento vertical) utilizam-se símbolos correspondentes com x substituído por y. Após se ter escolhido, para cada caso, o sentido indicado do eixo de referência, indique no quadro abaixo se estas quantidades são positivas, negativas ou nulas.



	A	B	C	D
$\mathbf{x}_0$ ou $\mathbf{y}_0$				
$\mathbf{x}_1$ ou $\mathbf{y}_1$				
$\mathbf{v}_{0x}$ ou $\mathbf{v}_{0y}$				
$\mathbf{v}_{1x}$ ou $\mathbf{v}_{1y}$				
$\mathbf{a}_x$ ou $\mathbf{a}_y$				

Q16 - Para cada um dos gráficos da velocidade em função do tempo que seguem, referentes a movimentos unidimensionais, desenhe o respectivo gráfico da aceleração em função do tempo.

Resolução:



Q17 - Se, num movimento unidimensional, a velocidade média é nula durante um intervalo de tempo Δt e se $v(t)$ é uma função contínua, mostre que a velocidade instantânea se deve anular em algum instante durante aquele intervalo. (Um esboço de x em função de t poderá ser útil na sua explicação).

Q18 – No movimento unidimensional é possível ter uma situação em que a velocidade e a aceleração têm sinais opostos? Em caso afirmativo, esboce um gráfico da velocidade em função do tempo para comprovar a sua resposta.

Problemas:

P1 - Este problema tem a ver com a conhecida fábula da lebre e da tartaruga. Uma tartaruga rápida pode correr a $10.0\ \mathrm{cm/s}$ **e uma lebre pode correr** 20 **vezes mais depressa. As duas iniciam uma corrida ao mesmo tempo, mas a lebre pára para descansar durante** $2.0\,\mathrm{min}$**, e por isso a tartaruga ganha por um palmo** $(20\,\mathrm{cm})$**. Considere os movimentos ao longo da mesma direcção.**

a) Desenhe, num gráfico da posição em função do tempo, as posições da lebre e da tartaruga durante o movimento.

b) Quanto tempo dura a corrida?

Seja v_t a velocidade da tartaruga e v_l a velocidade da lebre, isto é $v_t = 1.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{m/s}$ e $v_l = 2.00\,\mathrm{m/s}$. (Recorde que, como o movimento é unidimensional, a velocidade, apesar de ser um vector, pode ser representada por uma quantidade algébrica; a direcção é fixa, o sinal indica o sentido)

Se o tempo de duração da corrida (isto é, até o primeiro corredor atingir a meta) é t, então

$$v_t t - v_l\,(t - 2\,\mathrm{min}) = 0.20\,\mathrm{m},$$

porque a lebre esteve $2\,\mathrm{min}$ em repouso. Consequentemente, utilizando $2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$,

$$\begin{aligned} t &= \frac{0.20\,\mathrm{m} - v_l 120\,\mathrm{s}}{v_t - v_l} \\ &= \frac{0.20\,\mathrm{m} - 120\,\mathrm{s} \times 2.00\,\mathrm{m/s}}{1.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{m/s} - 2.00\,\mathrm{m/s}} \\ &= 1.2621 \times 10^{2}\,\mathrm{s}, \end{aligned}$$

que apresentamos com 3 algarismos significativos

$$t = 1.26 \times 10^{2}\,\mathrm{s}$$

c) Qual o comprimento total do percurso da corrida?

O percurso total é, evidentemente,

$$\begin{aligned} \ell &= v_t t \\ &= 1.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{m/s} \times 1.26 \times 10^{2}\,\mathrm{m} \\ &= 12.6\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

P2 - Uma partícula move-se ao longo do eixo do x **de acordo com a equação** $x = 2.0 + 3.0\,t - 1.0\,t^2$**, onde** x **está em m e** t **em s. Determine para** $t = 3$ **s :**

a) a posição da partícula,

Parab $t = 3$ s

$x = 2.0 + 3.0\,t - 1.0\,t^2 = 2.0\,\mathrm{m}$

b) a sua velocidade,

$v = \dfrac{dx}{dt} = 3.0 - 2.0t = -3.0\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

c) a sua aceleração.

$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -2.0\ \mathrm{m\ s^{-2}}.$

P3 - Um avião a jacto aterra com uma velocidade de 100 m s^{-1} e pode desacelerar a uma taxa máxima de 5.0 m s^{-2} até parar.

a) A partir do instante em que ele toca na pista de aterragem, qual é o tempo mínimo necessário para ele parar?

Como queremos o tempo mínimo temos de utilizar o módulo máximo da aceleração (que é negativa, em relação ao sentido da velocidade). A velocidade inicial do avião, para $t = 0\,\mathrm{s}$ é a velocidade que possui quando toca a pista, ou seja $v_0 = 100\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.No instante em que o avião se imobiliza, a sua velocidade é nula.O tempo decorrido até parar obtém-se utilizando a equação da velocidade em função do tempo, para movimento uniformemente acelerado, $v = v_0 + at$, isto é

$$t_{\min} = \frac{v - v_0}{a_{\max}}$$

Substituindo, $v = 0.$ e $a_{\max} = -5.0\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, ou

$$\begin{aligned} t &= \frac{0\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{-5.0\ \mathrm{m\,s^{-2}}} \\ &= 20\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

b) Pode este avião aterrar num aeroporto pequeno em que a pista tem 0.80 km de comprimento?

A resposta será afirmativa se a distância percorrida após tocar a pista e até o avião se imobilizar, com a aceleração igual ao valor máximo (mas negativa) for igual ou inferior a $800\,\mathrm{m}$.Essa distância pode ser calculada utilizando a equação da posição em função do tempo, para o instante correspondente ao tempo necessário para o avião atingir o repouso, calculado na alínea a):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= 0 + 100\,\mathrm{m\,s^{-1}} \times 20\,\mathrm{s} - \frac{1}{2} 5.0\,\mathrm{m\,s^{-2}} \times (20\,\mathrm{s})^2 \\ &= 1.0 \times 10^3\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aqui escolhemos $x = 0\,\mathrm{m}$ para $t = 0\,\mathrm{s}$.

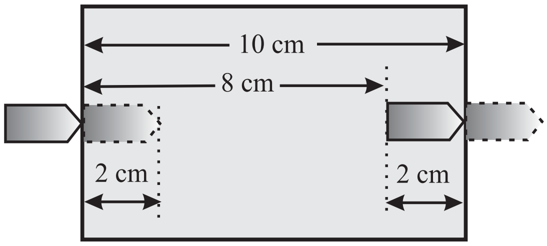
Se não tivessemos respondido à alínea a, podíamos obter o espaço percorrido até o avião se imobilizar utilizando a equação $v^2 - v_0^2 = 2a\,(x - x_0)$, ou

$$\begin{aligned} x_{\min} &= x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a_{\max}} \\ &= \frac{0\,\mathrm{m\,s^{-1}} - \left(100\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)^2}{-2 \times 5.0\,\mathrm{m\,s^{-2}}} \\ &= 1.0 \times 10^3\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

como acima. O avião não poderia aterrar num pista com 800 m de comprimento.

P4 - Uma bala de 2.00 cm de comprimento é disparada directamente através de uma tábua com 10.0 cm de espessura. A bala atinge a tábua com uma velocidade de módulo 420 m s^{-1} e emerge dela com uma velocidade de módulo 280 m s^{-1}.

a) Qual é a aceleração da bala através da tábua?



Como a bala tem dimensões, temos de considerar os intervalos de tempo correspondentes à entrada e à saída da tábua (ver figura) .Vamos introduzir a suposição, de que o valor da aceleração média durante esses percursos é metade do valor da aceleração quando está inteiramente no interior da tábua (recorde-se que, como o movimento é unidimensional, podemos identificar os vectores deslocamento, velocidade e aceleração como quantidades algébricas, uma vez que a direcção destes vectores é a mesma e não varia). .

Durante a entrada na tábua (percurso ℓ_1 com 2.00 cm de comprimento) e durante a saída (percurso ℓ_3 com 2.00 cm de comprimento) o valor da aceleração é, assim, $a/2$, em que a é a o valor da aceleração no percurso em que a bala está totalmente no interior da tábua (ℓ_2 com 8.00 cm de comprimento).

Utilizamos a equação do movimento uniformemente acelerado unidimensional, $v^2 - v_0^2 = 2ax$, aplicando aos diferentes percursos, obtendo

1. no percurso de entrada, ℓ_1

$$v_1^2 - v_0^2 = 2\frac{a}{2} \times \ell_1; \tag{1}$$

2. no percurso no interior da tábua, ℓ_2

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a \times \ell_2; \tag{2}$$

3. no percurso de saída, ℓ_3

$$v_3^2 - v_2^2 = 2\frac{a}{2} \times \ell_3, \tag{3}$$

em que v_0, v_1, v_2 e v_3 são os valores da velocidade da bala ao tocar na tábua, após o percurso ℓ_1, após o percurso ℓ_2 e após o percurso ℓ_3, respectivamente. Substituindo as eq.s (1) e (2) na eq. (3), vamos obter

$$\begin{aligned}
v_3^2 &= v_2^2 + 2\frac{a}{2} \times \ell_3 \\
v_3^2 &= v_1^2 + 2a \times \ell_2 + 2\frac{a}{2} \times \ell_3 \\
v_3^2 &= v_0^2 + 2\frac{a}{2} \times \ell_1 + 2a \times \ell_2 + 2\frac{a}{2} \times \ell_3 \\
v_3^2 - v_0^2 &= a\left(\ell_1 + 2\ell_2 + \ell_3\right) \\
a &= \frac{v_3^2 - v_0^2}{\ell_1 + 2\ell_2 + \ell_3}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
a &= \frac{(280\,\mathrm{m/s})^2 - (420\,\mathrm{m/s})^2}{2.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}} \\
&= -4.90 \times 10^5\ \mathrm{m/s^2}
\end{aligned}$$

Repare-se que este resultado é o mesmo que se obteria se considerássemos a bala como uma partícula pontual:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x},$$

em que x é a espessura da tábua. Obtemos, assim,

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{(280\,\mathrm{m/s})^2-(420\,\mathrm{m/s})^2}{2.00\times10^{-1}\,\mathrm{m}}\\
&= -4.90\times10^5\ \mathrm{m/s^2},
\end{aligned}
$$

que é o resultado obtido acima.

b) Qual é o tempo total de contacto da bala com a tábua?

Podemos calcular o tempo total, obtendo os intervalos de tempo para os três percursos ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 e somando-os. Como conhecemos o valor da aceleração em cada percurso, a utilização da expressão $\Delta x = v_\mathrm{i}\Delta t + \frac{1}{2}a\,(\Delta t)^2$, conjuntamente com a equação $v_\mathrm{f}^2 - v_\mathrm{i}^2 = 2a\Delta x$, permite-nos obter o intervalos de tempo para cada um dos percursos. Para o percurso ℓ_1:

$$
\begin{aligned}
\ell_1 &= v_0\Delta t_1 + \frac{1}{2}a\,(\Delta t_1)^2\\
v_1^2 &= v_0^2 + 2a\ell_1
\end{aligned}
$$

Obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta t_1 &= \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2+2a\ell_1}}{a}\\
&= \frac{-420\,\mathrm{m/s}+\sqrt{(420\,\mathrm{m/s})^2-(4.90\times10^5\ \mathrm{m/s^2})\times(0.02\,\mathrm{m})}}{\frac{-4.90\times10^5\ \mathrm{m/s^2}}{2}}\\
&= 4.8299\times10^{-5}\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
v_1^2 &= (420\,\mathrm{m/s})^2 - \left(4.90\times10^5\ \mathrm{m/s^2}\right)\times(0.02\,\mathrm{m})\\
&= 1.666\times10^5\,(\mathrm{m/s})^2\\
v_1 &= \sqrt{1.666\times10^5}\,\mathrm{m/s}\\
&= 4.082\times10^2\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

Para o percurso ℓ_2:

$$
\begin{aligned}
\ell_2 &= v_1\Delta t_2 + \frac{1}{2}a\,(\Delta t_2)^2\\
v_2^2 &= v_1^2 + 2a\ell_2
\end{aligned}
$$

Obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta t_2 &= \frac{-v_1+\sqrt{v_1^2+2a\ell_2}}{2a}\\
&= \frac{-4.082\times10^2\,\mathrm{m/s}+\sqrt{(4.082\times10^2\,\mathrm{m/s})^2-2\times4.90\times10^5\ \mathrm{m/s^2}\times0.08\,\mathrm{m}}}{-4.90\times10^5\,\mathrm{m/s^2}}\\
&= 2.2688\times10^{-4}\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
v_2^2 &= \left(4.082\times10^2\,\mathrm{m/s}\right)^2 - 2\times4.90\times10^5\,\mathrm{m/s^2}\times0.08\,\mathrm{m}\\
&= 8.823\times10^4\,(\mathrm{m/s})^2\\
v_2 &= \sqrt{8.823\times10^4}\,\mathrm{m/s}\\
&= 2.970\times10^2\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}
$$

Para o percurso ℓ_3:

$$\ell_3 = v_2 \Delta t_3 + \frac{1}{4} a \left(\Delta t_3\right)^2 .$$

Obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta t_3 &= \frac{-v_2 - \sqrt{v_2^2 + a\ell_3}}{a} \\
&= \frac{-2.970 \times 10^2\,\mathrm{m/\,s} + \sqrt{(2.970 \times 10^2\,\mathrm{m/\,s})^2 - 4.\,90 \times 10^5\,\mathrm{m/\,s^2} \times 0.02\,\mathrm{m}}}{\frac{-4.\,90 \times 10^5\,\mathrm{m/\,s^2}}{2}} \\
&= : 6.\,93 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3^2 &= v_2^2 + 2a\ell_3 \\
&= \left(2.970 \times 10^2\,\mathrm{m/\,s}\right)^2 - 4.\,90 \times 10^5\,\mathrm{m/\,s^2} \times 0.02\,\mathrm{m} \\
&= 7.8409 \times 10^4\,(\,\mathrm{m/\,s})^2 \\
v_3 &= \sqrt{7.8409 \times 10^4}\,\mathrm{m/\,s} \\
&= 2.80 \times 10^2\,\mathrm{m/\,s},
\end{aligned}$$

como esperávamos. O intervalo de tempo em que a bala está em contacto com a tábua é, portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 \\
&= 4.\,830 \times 10^{-5}\,\mathrm{s} + 2.\,268\,8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s} + 6.\,93 \times 10^{-5}\,\mathrm{s} \\
&= 3.\,44 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

:**c) Que espessura de tábua (calculada até à precisão de** 0.1 **cm) seria necessária para parar a bala?**

Queremos que o comprimento ℓ_2 seja tal que o valor da velocidade da bala seja nula, quando atinge a parede oposta à da entrada, isto é, pretendemos $v_2 = 0\,\mathrm{m/\,s}$. Utilizamos a equação

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a\ell_2,$$

com $v_2 = 0\,\mathrm{m/\,s}$, para obter

$$\begin{aligned}
\ell_2 &= \frac{-\left(4.082 \times 10^2\,\mathrm{m/\,s}\right)^2}{-2 \times 4.\,90 \times 10^5\,\mathrm{m/\,s^2}} \\
&= 0.17\,\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

A este valor temos de adicionar o percurso $\ell_1 = 0.02\,\mathrm{m}$, para obter, finalmente para a espessura, L, da tábua de modo a parar a bala totalmente no seu interior,

$$\begin{aligned}
L &= \ell_1 + \ell_2 \\
&= 0.02\,\mathrm{m} + 0.17\,\mathrm{m} \\
&= 0.19\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

P5 - Um comboio pode minimizar o tempo t entre duas estações acelerando primeiro a uma taxa $a_1 = 0.100\ \mathrm{m/s^2}$ durante um tempo t_1, e desacelerando depois a uma taxa $a_2 = -0.500\ \mathrm{m/s^2}$ durante um tempo t_2, utilizando os travões. Dado que as estações estão afastadas apenas de 1.00 km, o comboio nunca atinge a sua velocidade máxima. Determine o tempo de viagem t e o tempo t_1.

Durante o intervalo de tempo t_1 o comboio percorre a distância L_1, adquirindo a velocidade v_1 que é obtida utilizando

$$v_1^2 = 2a_1L_1.$$

Durante o intervalo de tempo $t_2 = t - t_1$ o comboio percorre a distância L_2 , dada por

$$-v_1^2 = 2a_2L_2$$

O percurso total é

$$L = L_1 + L_2 = \frac{v_1^2}{2a_1} - \frac{v_1^2}{2a_2}$$

ou

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{2L}{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)} \\ &= \frac{2 \times 10^3}{\left(\frac{1}{0.100} + \frac{1}{0.500}\right)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{166.67}\,\mathrm{m/s} \\ &= 12.9\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Temos, assim

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{v_1^2}{2a_1} \\ &= \frac{166.67\,(\mathrm{m/s})^2}{2 \times 0.100\,\mathrm{m/s^2}} \\ &= 8.33 \times 10^2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{-v_1^2}{2a_2} \\ &= \frac{166.67\,(\mathrm{m/s})^2}{2 \times 0.500\,\mathrm{m/s^2}} \\ &= 1.67 \times 10^2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Então, o tempo de aceleração é, a partir de $v_1 = a_1t_1$,

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{v_1}{a_1} \\ &= \frac{12.9\,\mathrm{m/s}}{0.100\,\mathrm{m/s^2}} \\ &= 1.29 \times 10^2\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

enquanto que o tempo de desaceleração é, de $0 = v_1 + a_2 t_2$,

$$\begin{aligned} t_2 &= -\frac{v_1}{a_2} \\ &= \frac{12.\,9\,\mathrm{m/\,s}}{0.500\,\mathrm{m/\,s^2}} \\ &= 2.5\,8 \times 10\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

O tempo total é

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 \\ &= 1.29 \times 10^2\,\mathrm{s} + 2.5\,8 \times 10\,\mathrm{s} \\ &= 1.55 \times 10^2\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$